

MÚLTIPLOS Y DIVISORES

MÚLTIPLOS DE UN NÚMERO

Los múltiplos de un número son los que lo contienen un número exacto de veces.

El 12 es múltiplo de 3 porque lo contiene 4 veces.

El 30 es múltiplo de 5 porque lo contiene 6 veces.

Los múltiplos de un número se calculan multiplicando este número por los números naturales $= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$

Los múltiplos de un número son infinitos.

Múltiplos de 2 $= \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, \dots\}$

Múltiplos de 3 $= \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, \dots\}$

Múltiplos de 11 $= \{0, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 110, 121, 132, \dots\}$

MÚLTIPLOS COMUNES A VARIOS NÚMEROS

Calculados los conjuntos de los múltiplos de dos o más números siempre podemos encontrar múltiplos comunes.

$M(3) = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60, \dots\}$

$M(4) = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, 64, \dots\}$

$M(8) = \{0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88, \dots\}$

Múltiplos comunes de 3 y 4 $= \{0, 12, 24, 36, 48, 60, \dots\}$

Múltiplos comunes de 3, 4 y 8 $= \{0, 24, 48, \dots\}$

Mínimo común múltiplo de varios números (m.c.m.).- Se llama así al menor de los múltiplos comunes de dichos números excluido el cero.

$m.c.m.(3, 4) = 12$

$m.c.m.(2, 4, 8) = 8$

DIVISORES DE UN NÚMERO

Divisor de un número es aquel que está contenido en él un número exacto de veces. Al dividir un número por sus divisores el resto es cero.

El 5 es divisor de 15 porque lo contiene tres veces. $15 : 5 = 3$ y resto 0.

Observa la relación: 5 es **divisor** de 15 $\longleftrightarrow$ 15 es **múltiplo** de 5

Un número es **divisible** por otro cuando lo contiene un número exacto de veces. Un número es divisible por todos sus divisores.

$D(5) = \{1, 5\}$

$D(6) = \{1, 2, 3, 6\}$

$D(8) = \{1, 2, 4, 8\}$

$D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

$D(20) = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$

DIVISORES COMUNES A VARIOS NÚMEROS

Un número es divisor común de dos o más números si es divisor de todos ellos.

$$\left. \begin{array}{l} D(12) = \{1, 2, 3, 4, 12\} \\ D(15) = \{1, 3, 5, 15\} \end{array} \right\} \text{ Divisores comunes de 12 y 15} = \{1, 3\}$$

$$\left. \begin{array}{l} D(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\} \\ D(24) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\} \end{array} \right\} \text{ Divisores comunes de 18 y 24} = \{1, 2, 3, 6\}$$

Máximo común divisor (m.c.d.) de dos o más números es el mayor de los divisores comunes.

$$\text{m.c.d.}(12, 15) = 3$$

$$\text{m.c.d.}(18, 24) = 6$$

NÚMEROS PRIMOS Y NÚMEROS COMPUESTOS

Números primos son aquellos que sólo son divisibles por sí mismo y por la unidad. Es decir, sólo tienen por divisores a sí mismo y a la unidad.

Números compuestos son los que además de ser divisibles por sí mismos y por la unidad tienen otros divisores.

$$\text{Números primos} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \dots\}$$

CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Nos permiten saber de un modo sencillo cuando un número es divisible por otro.

Número	CRITERIO
2	Un número es divisible por 2 cuando acaba en 0 o cifra par.
3	Un número es divisible por 3 cuando la suma de sus cifras da tres o múltiplo de 3.
4	Un número es divisible por 4 cuando lo es el número formado por sus dos últimas cifras.
5	Un número es divisible por 5 cuando acaba en 0 ó en 5.
6	Un número es divisible por 6 cuando es divisible por 2 y por 3.
8	Un número es divisible por 8 cuando lo es el número formado por sus tres últimas cifras.
9	Un número es divisible por 9 cuando la suma de sus cifras da nueve o múltiplo de 9.
10	Un número es divisible por 10 cuando acaba en 0.

DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL DE UN NÚMERO EN PRODUCTO DE FACTORES PRIMOS.

Para descomponer un número en un producto de factores primos se procede según el ejemplo en el que vamos a descomponer paso a paso el número 60.

$\begin{array}{r l} 60 & 2 \\ 30 & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$
Comprobamos si 60 es divisible por el primer nº primo (2) y dividimos	Comprobamos si el cociente anterior obtenido, 30 es divisible por 2 y dividimos	Coprobamos si 15 es divisible por 2, como no lo es lo hacemos con el siguiente nº primo el 3 y dividimos.	Por último, el resto obtenido (5) lo dividimos por el nº primo que se puede dividir, el mismo 5.

La descomposición factorial la expresaremos de la siguiente forma:

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5$$

Las descomposiciones factoriales no se realizan en varias barras como en el ejemplo, sino que se hacen en una sola como en los siguientes ejemplos.

$\begin{array}{r l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$
$8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$	$12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$	$50 = 2 \times 5 \times 5 = 2 \times 5^2$	$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$

m.c.d. y m.c.m. A PARTIR DE LA DESCOMPOSICIÓN EN PRODUCTO DE FACTORES PRIMOS

Para calcular el **m.c.d.** de dos o más números los descomponemos en su producto de factores primos y tomamos los factores comunes con el menor exponente.

Para calcular el **m.c.m.** de dos o más números los descomponemos en su producto de factores primos y tomamos los factores comunes y no comunes con el mayor exponente.

Utilizando las descomposiciones factoriales anteriores, observa:

m.c.d. (12, 50) $12 = 2^2 \times 3$ $50 = 2 \times 5^2$ m.c.d. (12, 50) = 2	m.c.m (12, 50) $12 = 2^2 \times 3$ $50 = 2 \times 5^2$ m.c.m (12, 50) = $2^2 \times 3 \times 5^2 = 300$	m.c.d. (60, 50) $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ $50 = 2 \times 5^2$ m.c.d. (60, 50) = $2 \times 5 = 10$	m.c.m. (60, 50) $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ $50 = 2 \times 5^2$ m.c.d. (60, 50) = $2^2 \times 3 \times 5^2 = 300$
--	---	--	--